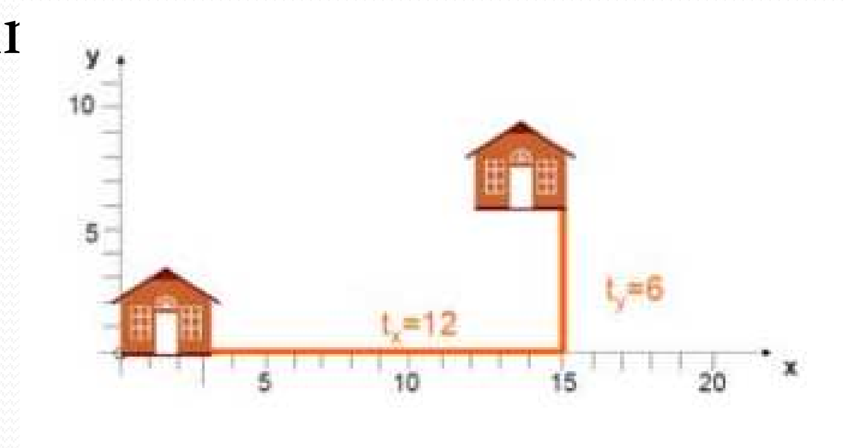
Transformaciones Geométricas

M.C. Beatriz Adriana Sabino Moxo

Transformaciones bidimensionales

Traslación

Esta operación se usa para ***mover*** un objeto o grupo de objetos de manera lineal a una nueva ubicación en el espacio bidi



Transformaciones bidimensionales

Traslación

Suponga que desea mover un punto p=(x,y) dentro del plano por un factor de desplazamiento de t_x unidades en horizontal y t_y unidades en vertical, las coordenadas del nuevo punto p' serán:

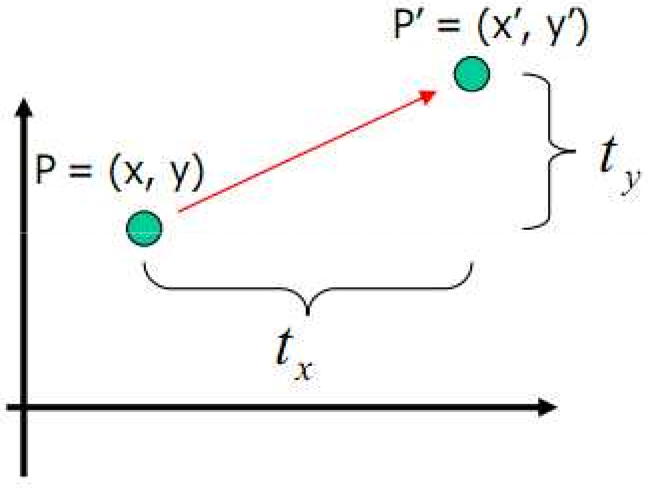
$$\mathbf{x' = x + t_x}$$

$$\mathbf{y' = y + t_y}$$

Transformaciones bidimensionales

Traslación

$$x' = x + t_x$$
$$y' = y + t_y$$



(t_x, t_y)

Transformaciones bidimensionales

Traslación

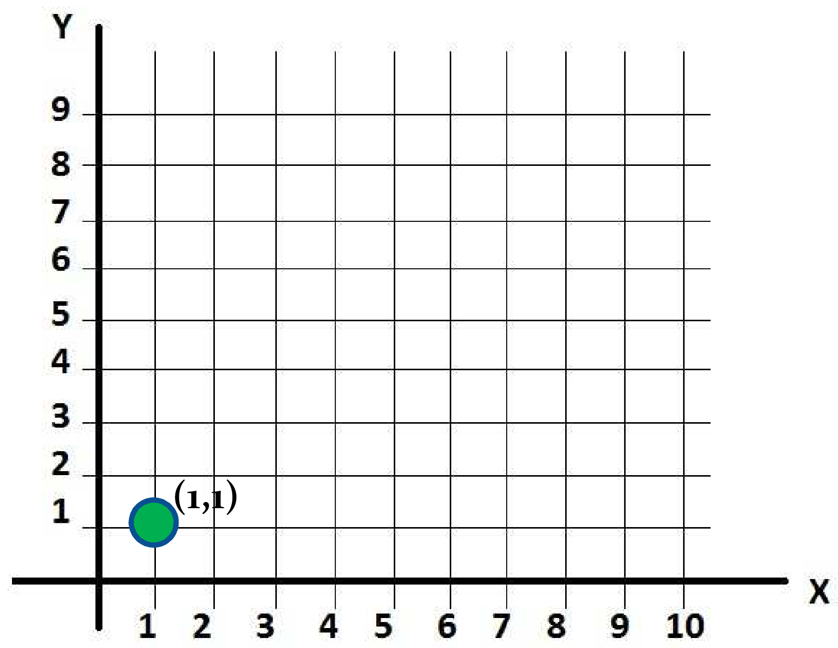
Ejemplo:

Se tiene el punto p=(1,1) y se desea hacer una traslación t_x=3 y t_y=4, ¿Cuáles son las nuevas coordenadas?

$x' = 1 + 3 = 4$

$y' = 1 + 4 = 5$

$p(x',y') = (4,5)$



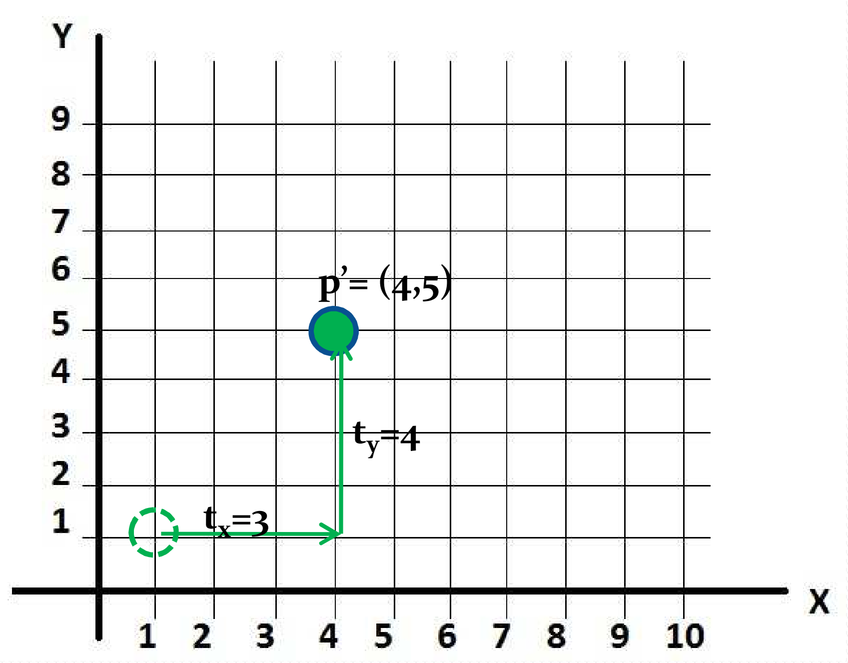
Transformaciones bidimensionales

Traslación

Ejemplo:

Se tiene el punto (1,1) y se desea hacer una traslación $t_x=3$ y $t_y=4$, ¿Cuáles son las nuevas coordenadas?

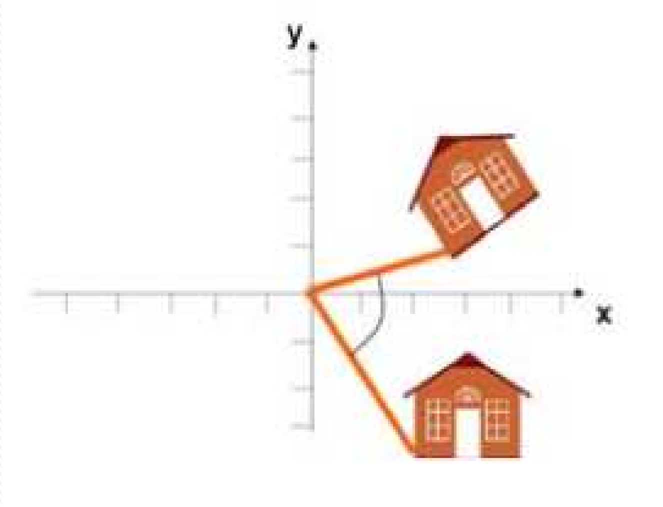
$$x' = 1 + 3 = 4$$
$$y' = 1 + 4 = 5$$
$$(x',y') = (4,5)$$



Transformaciones bidimensionales

Rotación

Esta transformación geométrica se usa para ***mover*** un objeto o grupo de objetos ***alrededor de un punto***.



Transformaciones bidimensionales

Rotación

La ecuación para la rotación un punto p=(x,y) es:

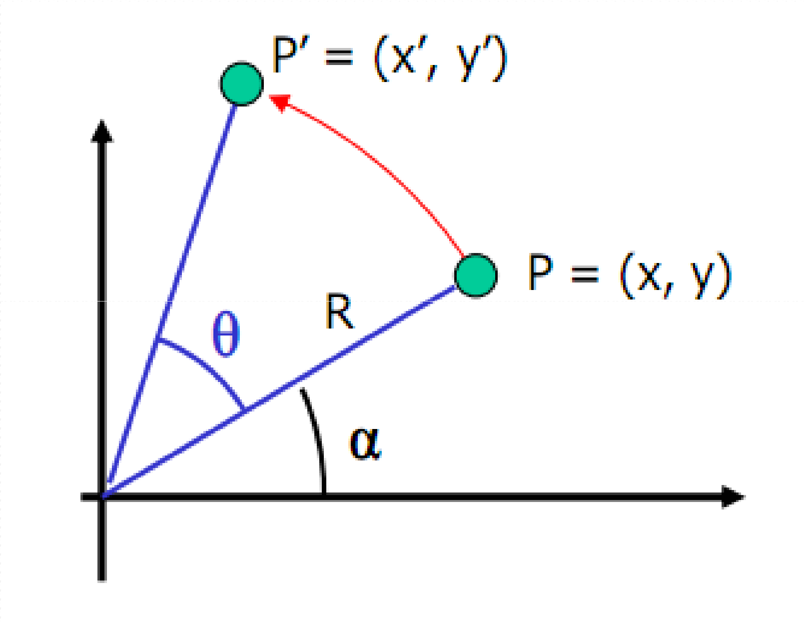
$$\mathbf{x' = x\cos\theta - y\,sen\theta}$$

$$\mathbf{y' = x\,sen\theta + y\cos\theta}$$

Transformaciones bidimensionales

Rotación

$$x' = x\cos\theta - y\,\mathrm{sen}\,\theta$$
$$y' = x\,\mathrm{sen}\,\theta + y\cos\theta$$



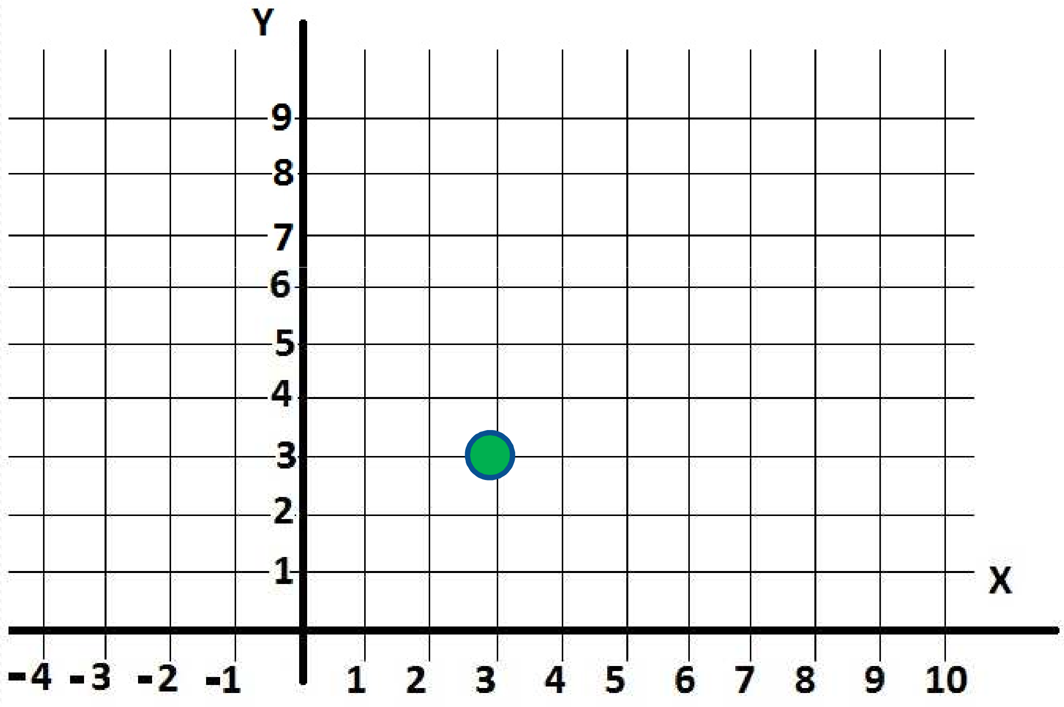
$$\begin{cases} x = R\cos\alpha \\ y = R\sin\alpha \end{cases} \qquad \begin{cases} x' = R\cos(\alpha+\theta) = \ldots = x\cos\theta - y\sin\theta \\ y' = R\sin(\alpha+\theta) = \ldots = x\sin\theta + y\cos\theta \end{cases}$$

Transformaciones bidimensionales

Rotación

Ejemplo:

Sea el punto p = (3,3), rotar por el factor θ=90°



$x' = 3\cos 90° - 3\text{sen}90° = -3$

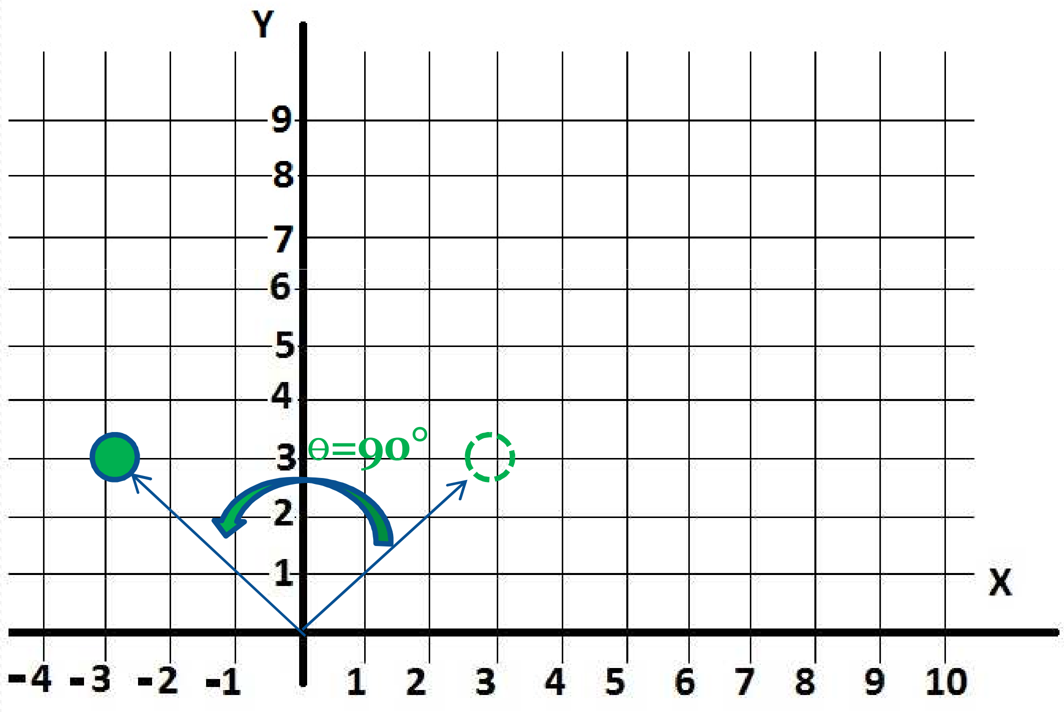
$y' = 3\text{sen}90° + 3\cos 90° = 3$

Transformaciones bidimensionales

Rotación

Ejemplo:

Sea el punto p = (3,3), rotar por el factor θ=90°



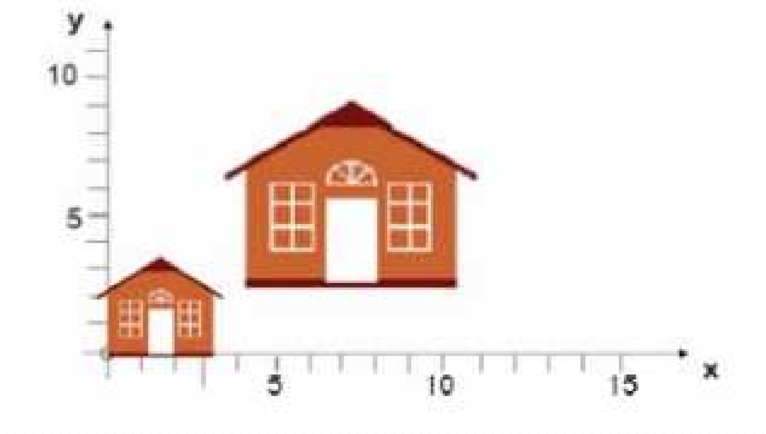
x' = 3cos90° - 3sen90° = -3

y' = 3sen90° + 3cos90° = 3

Transformaciones bidimensionales

Escalación

Es una transformación que permite ***cambiar el tamaño o la proporción*** de un objeto o grupo de objetos. Hay escalados proporcionales y no proporcionales.



Transformaciones bidimensionales

Escalación

La ecuación para el escalar un punto (x,y) es:

$$\mathbf{x' = xS_x}$$
$$\mathbf{y' = yS_y}$$

Donde S_x y S_y son factores de escala sobre los ejes x y y respectivamente

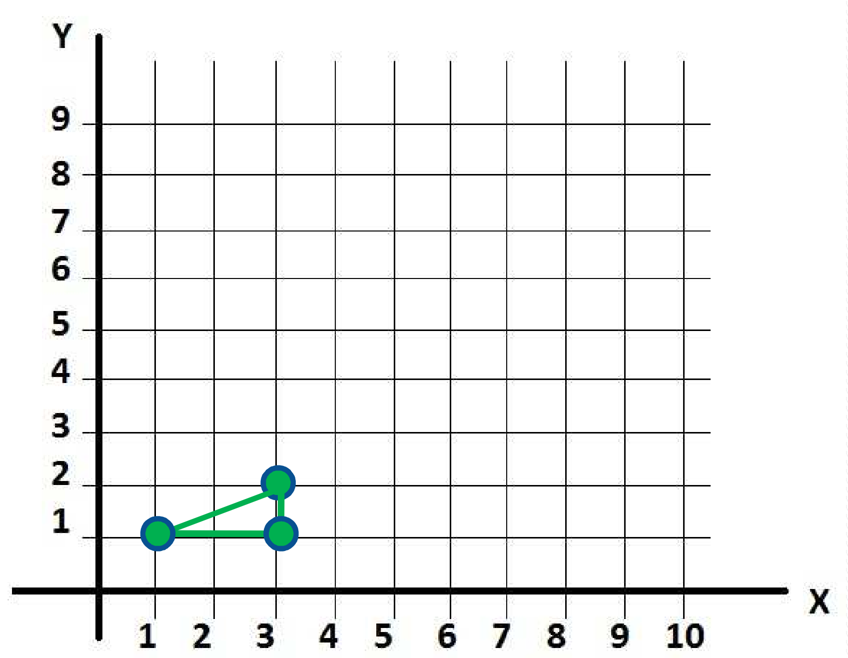
Transformaciones bidimensionales

Escalación

Ejemplo:

Sea un triangulo con los puntos $p_1=(1,1)$, $p_2=(3,1)$ y $p_3=(3,2)$ con $S_x=2$ y $S_y=2$.

$P_1' = (1*S_x, 1*S_y)$
$= (1*2, 1*2) = (2,2)$
$P_2' = (3*S_x, 1*S_y)$
$= (3*2, 1*2) = (6,2)$
$P_3' = (3*S_x, 2*S_y)$
$= (3*2, 2*2) = (6,4)$



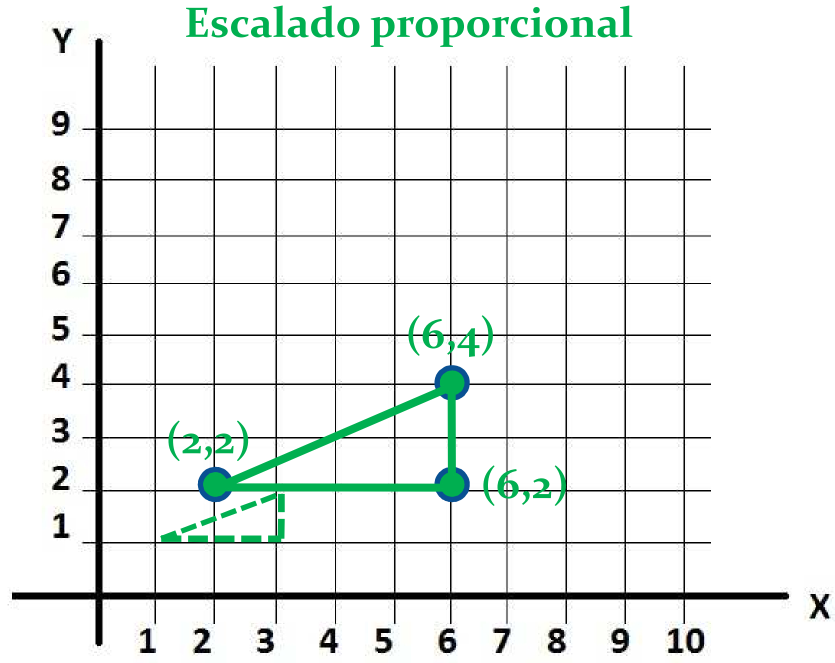
Transformaciones bidimensionales

Escalación

Ejemplo:

Sea un triangulo con los puntos $p_1=(1,1)$, $p_2=(3,1)$ y $p_3=(3,2)$ con $S_x=2$ y $S_y=2$.

$P_1' = (1*S_x, 1*S_y)$
$= (1*2, 1*2) = (2,2)$
$P_2' = (3*S_x, 1*S_y)$
$= (3*2, 1*2) = (6,2)$
$P_3' = (3*S_x, 2*S_y)$
$= (3*2, 2*2) = (6,4)$



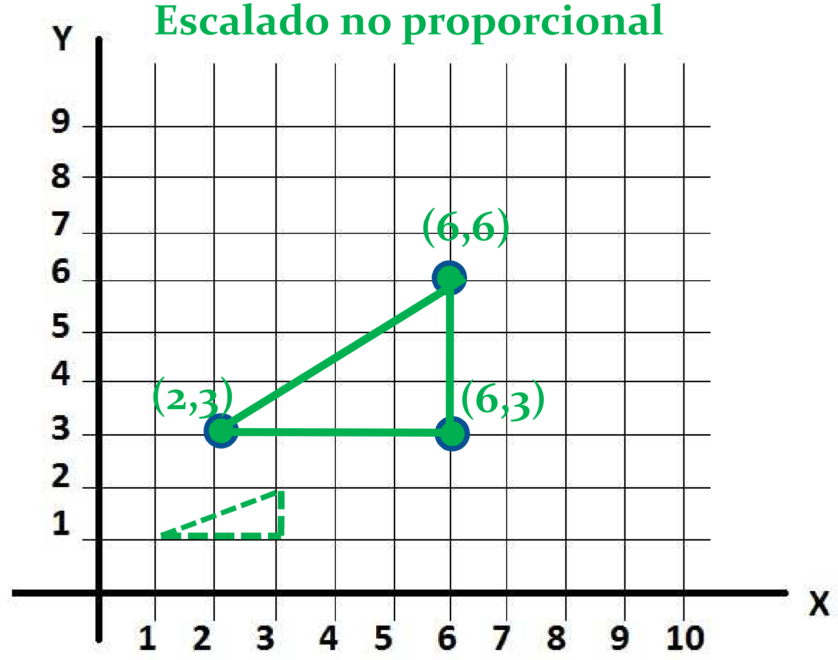
Transformaciones bidimensionales

Escalación

Ejemplo:

El mismo triangulo del ejemplo anterior con $S_x=2$ y $S_y=3$

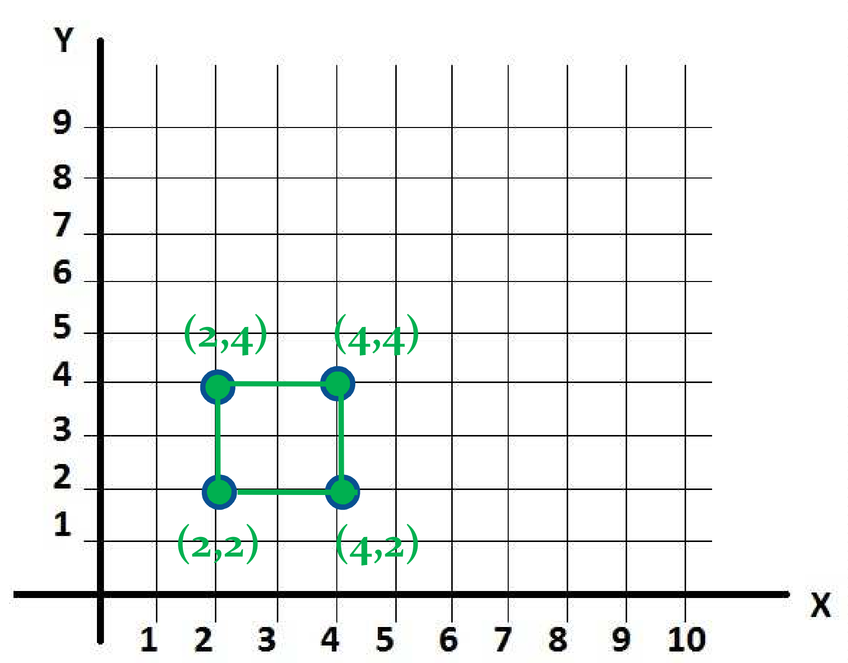
$P_1' = (1*S_x, 1*S_y)$
$= (1*2, 1*3) = (2,3)$
$P_2' = (3*S_x, 1*S_y)$
$= (3*2, 1*3) = (6,3)$
$P_3' = (3*S_x, 2*S_y)$
$= (3*2, 2*3) = (6,6)$



Transformaciones bidimensionales

Ejercicios

Sea el cuadrado con los puntos $p_1=(2,2)$, $p_2=(4,2)$, $p_3=(2,4)$ y $p_4=(4,4)$, realizar las siguientes transformaciones y graficarlas:



- Una traslación en $t_x=6$ y $t_y=3$.
- Un escalamiento $S_x=6$ y $S_y=3$.
- Una rotación con $\theta= 45°$

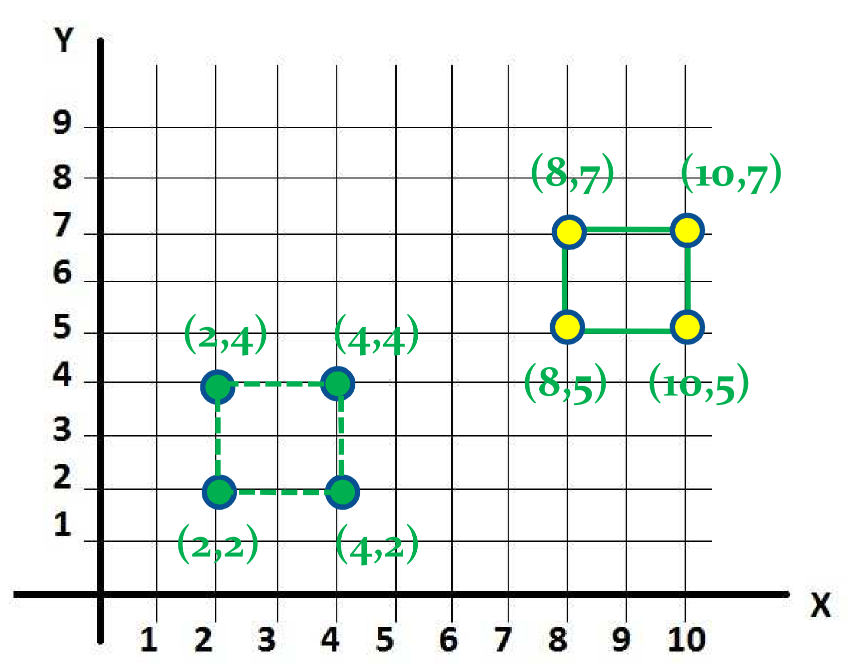
Transformaciones bidimensionales

Ejercicios

Soluciones

- Traslación en $t_x=6$ y $t_y=3$:

$p_1'=(8,5)$, $p_2'=(10,5)$, $p_3'=(8,7)$, $p_4'=(10,7)$.



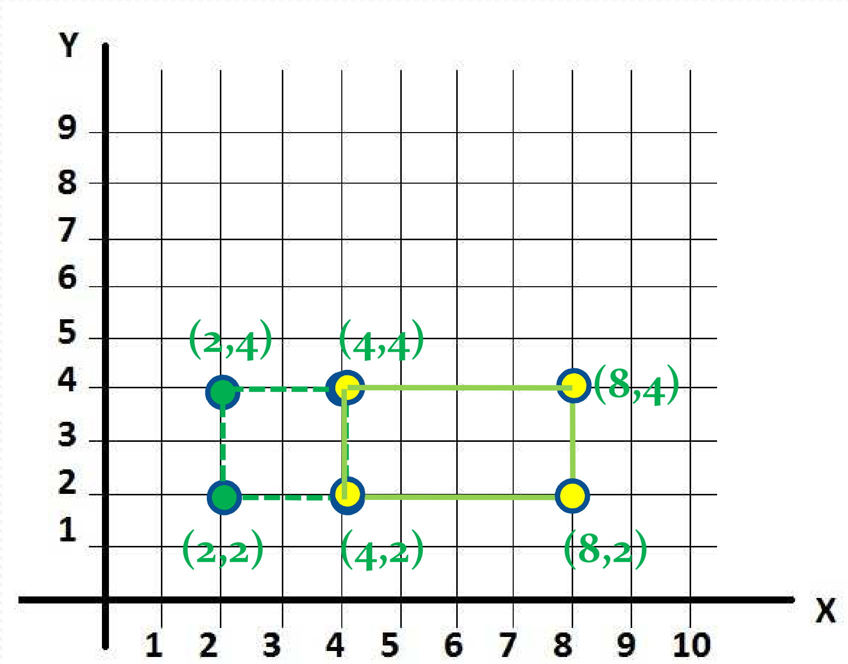
Transformaciones bidimensionales

Ejercicios

Soluciones

- Un escalamiento S_x=2 y S_y=1:

p_1'=(4,2), p_2'=(8,2), p_3'=(4,4), p_4'=(8,4).

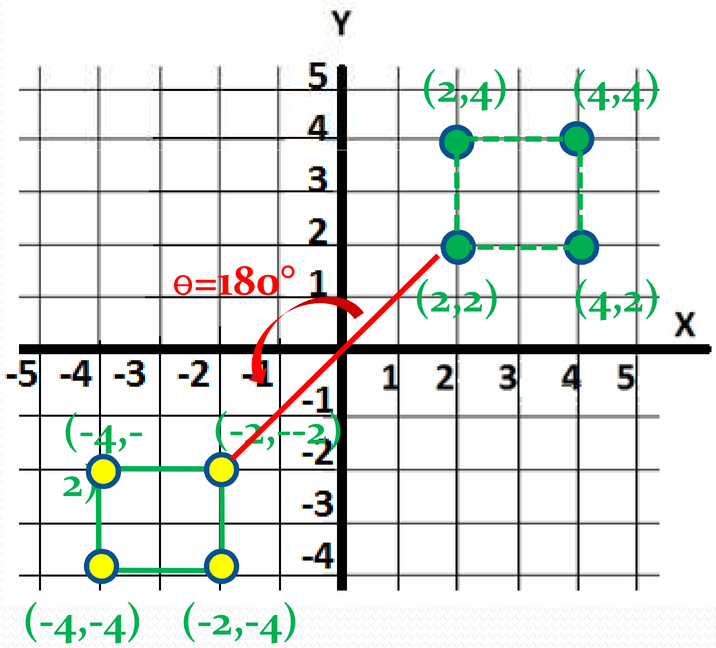


Ejercicios

Soluciones

- Una rotación con θ= 45°:

p_1'=(-2,-2), p_2'=(-4,-2), p_3'=(-2,-4), p_4'=(-4,-4).



Coordenadas homogéneas y representación matricial

El uso de coordenadas homogéneas permite tratar todas las transformaciones geométricas como una ***multiplicación de matrices.***

Las coordenadas agregan un tercer componente a las coordenadas bidimensionales. De tal forma que, un punto (x,y) pasa a ser (x,y,W). El valor de W es generalmente 1.

Coordenadas homogéneas y representación matricial

Traslación

$$(x', y', 1) = (x, y, 1)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ t_x & t_y & 1 \end{pmatrix}$$

$$x' = x + 0 + t_x$$
$$y' = 0 + y + t_y$$
$$1 = 1$$

$$p' = p.M_t$$

$$x' = x + t_x$$
$$y' = y + t_y$$

Coordenadas homogéneas y representación matricial

Traslación

Ejemplo:

Se tiene el punto p=(1,1) y se desea hacer una traslación t_x=3 y t_y=4, ¿Cuáles son las nuevas coordenadas?

$$(x', y', 1) = (1,1,1) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

$$x' = 1 + 0 + 3 = 4$$
$$y' = 0 + 1 + 4 = 5$$
$$1 = 1$$

$$p' = p.M_t$$

$$p'(x', y') = (4,5)$$

Coordenadas homogéneas y representación matricial

Rotación

$$(x', y', 1) = (x, y, 1)\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

x' = xcosθ - y sinθ + 0
y' = xsinθ + ycosθ + 0
1 = 1

$$p' = p.M_R$$

x' = xcosθ - y sinθ
y' = xsinθ + ycosθ

Coordenadas homogéneas y representación matricial

Rotación

Ejemplo:

Rotar el punto p = (3,3) con $\theta=90°$

$$(x',y'\ 1) = (3,3,1)\begin{pmatrix} \cos 90° & \operatorname{sen} 90° & 0 \\ -\operatorname{sen} 90° & \cos 90° & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$x' = 0 - 3 + 0 = -3$$
$$y' = 3 + 0 + 0 = 3$$
$$1 = 1$$

$$p' = p.M_R$$

$$p'(x', y') = (-3,3)$$

Coordenadas homogéneas y representación matricial

Escalación

$$(x', y', 1) = (x, y, 1)\begin{pmatrix} s_x & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$x' = S_x$
$y' = S_y$
$1 = 1$

$$p' = p.M_s$$

$x' = S_x$
$y' = S_y$

Coordenadas homogéneas y representación matricial

Escalación

Ejemplo:

Escalar el p = (3,3) con $S_x=3$, $S_y=5$

$$(x', y', 1) = (3,3,1)\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$x' = 9 + 0 + 0 = 9$$
$$y' = 0 + 15 + 0 = 15$$
$$1 = 1$$

$$p' = p.M_s$$

$$p'(x', y') = (9,15)$$

Composición de transformaciones bidimensionales

Para aplicar varias transformaciones a un conjunto de puntos basta con combinar las matrices de transformación en una sola mediante multiplicación matricial.

$$[M_1][M_2][M_3][M_4]....[M_N]=[M_R]$$

$$p'=p.[M_R]$$

Composición de transformaciones bidimensionales

Ejemplo

Aplicar al punto p(4,5) las siguientes transformaciones:

- Traslación $t_x= 2$, $t_y=3$
- Escalación $S_x=4, S_y=4$
- Rotación de $\theta=90°$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos 90° & \text{sen}\,90° & 0 \\ -\text{sen}\,90° & \cos 90° & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = [M_R]$$

$$p'(x',y',1)=(4,5,1).[M_R]$$

Composición de transformaciones bidimensionales

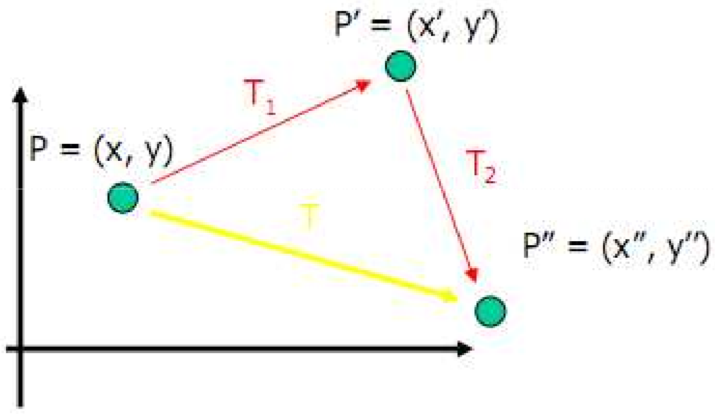
Ejemplo

Traslaciones sucesivas.

$$P' = P \cdot T_1(t_{x1}, t_{y1})$$

$$P'' = P' \cdot T_2(t_{x2}, t_{y2})$$

$$P'' = P' \cdot T_2 = P \cdot T_1 \cdot T_2 = P \cdot T$$



$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ t_{x1} & t_{y1} & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ t_{x2} & t_{y2} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ t_{x1}+t_{x2} & t_{y1}+t_{y2} & 1 \end{pmatrix}$$

Composición de transformaciones bidimensionales

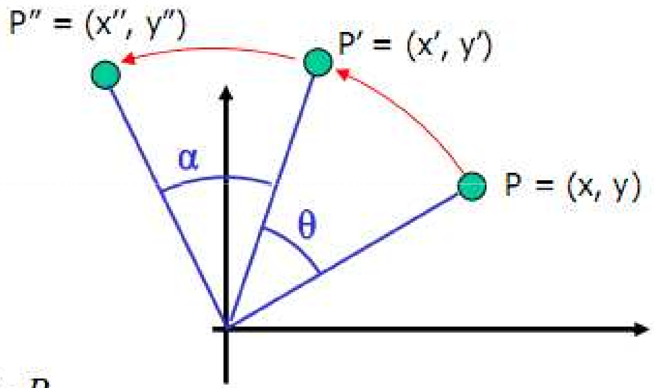
Ejemplo

Rotaciones sucesivas.

$$P' = P \cdot R(\theta)$$

$$P'' = P' \cdot R(\alpha)$$

$$P'' = P' \cdot R(\alpha) = P \cdot R(\theta) R(\alpha) = P \cdot R$$



$$R = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta+\alpha) & \sin(\theta+\alpha) & 0 \\ -\sin(\theta+\alpha) & \cos(\theta+\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Composición de transformaciones bidimensionales

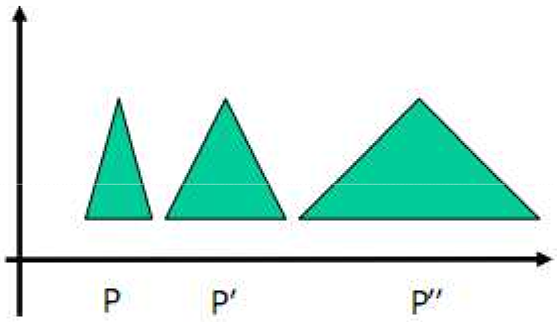
Ejemplo

Escalados sucesivos.

$$P' = P \cdot S_1(s_{x1}, s_{y1})$$

$$P'' = P' \cdot S_2(s_{x2}, s_{y2})$$

$$P'' = P' \cdot S_2 = P \cdot S_1 \cdot S_2 = P \cdot S$$



$$S = \begin{pmatrix} s_{x1} & 0 & 0 \\ 0 & s_{y1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} s_{x2} & 0 & 0 \\ 0 & s_{y2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_{x1}s_{x2} & 0 & 0 \\ 0 & s_{y1}s_{y2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Composición de transformaciones bidimensionales

Rotación de punto de pivote general

Para rotar un objeto respecto a un punto arbitrario P_C se siguen los siguientes pasos:

1. Trasladar el punto P_c al origen (M_t)
2. Rotar el objeto un ángulo θ (M_R)
3. Trasladar el punto P_c a su posición original (M_t^{-1})

Composición de transformaciones bidimensionales

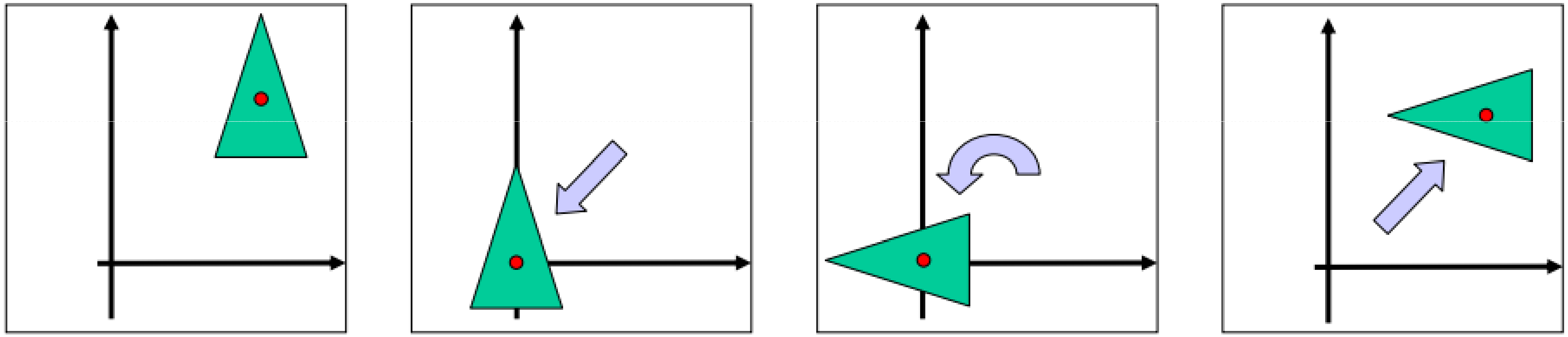
Rotación de punto de pivote general $C=(C_x, C_y)$

1. Trasladar el punto *C* al origen (M_t)
2. Rotar el objeto un ángulo θ (M_R)
3. Trasladar el punto *C* a su posición original (M_t^{-1})

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -C_x & -C_y & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos 90° & \operatorname{sen} 90° & 0 \\ -\operatorname{sen} 90° & \cos 90° & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ C_x & C_y & 1 \end{pmatrix}$$

Composición de transformaciones bidimensionales

Rotación de punto de pivote general



Composición de transformaciones bidimensionales

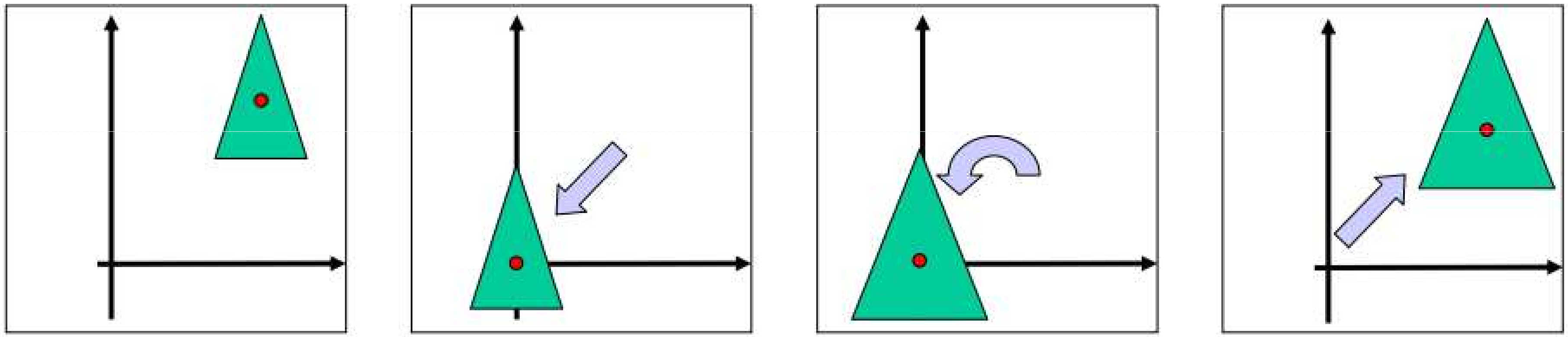
Escalación de punto de pivote general $C=(C_x, C_y)$

1. Trasladar el punto *C* al origen (M_t)
2. Escalar el objeto con S_x y S_y
3. Trasladar el punto *C* a su posición original (M_t^{-1})

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -C_x & -C_y & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S_x & 0 & 0 \\ 0 & S_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ C_x & C_y & 1 \end{pmatrix}$$

Composición de transformaciones bidimensionales

Escalación del punto fijo general



Algunas aplicaciones de la graficación

- Creación de escenas 3D

¡GRACIAS!